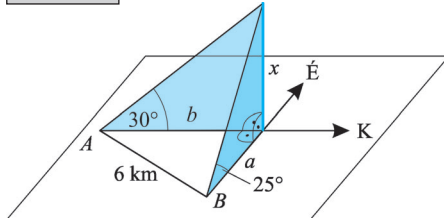


IV

2658.



2658. $x \approx 2,18$ km magasan van a hőlégballon.

Egyrészt $\frac{x}{a} = \operatorname{tg} 25^\circ$ és $\frac{x}{b} = \operatorname{tg} 30^\circ$, másrészt a Pitagorasz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = 6^2$. Ezen egyenletrendszerből meghatározhatjuk az x magasságot. Az első két egyenletből fejezzük ki a -t, illetve b -t x -szel, majd ezeket helyettesítsük be a harmadik egyenletbe,

amelyben már csak x lesz az ismeretlen.
$$x = \sqrt{\frac{36 \cdot \operatorname{tg}^2 25^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 30^\circ}{\operatorname{tg}^2 30^\circ + \operatorname{tg}^2 25^\circ}}$$

2659. $h \approx 301$ m magasan lebeg a léggömb.

Vegyük észre, hogy $LT = TB$, ezért $TB = h$. Egyrészt $\frac{h}{AT} = \operatorname{tg} 37^\circ$, másrészt alkalmazzuk Pitagorasz tételét az ABT derékszögű háromszögre. Fejezzük ki az előző egyenletből AT -t, majd ezt helyettesítsük be a Pitagorasz-tétel alapján felírt egyenletbe. Itt már csak h lesz az ismeretlen, amelyet könnyen meghatározhatunk kis számolás után.
$$h = \frac{500 \operatorname{tg} 37^\circ}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 37^\circ}} \approx 301 \text{ m.}$$
 Adjunk egy

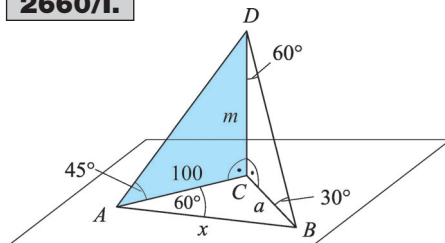
második megoldást, például úgy, hogy észrevevessük, hogy az ATL háromszög egybevágó az ABT háromszöggel. Miért? Az egybevágóságból következik, hogy $AB = AL$. Folytassuk!

2660. a) eset: $AB = 200$ m, (2660/I.); b) eset: $AB^* = 100$ m. (2660/II.)

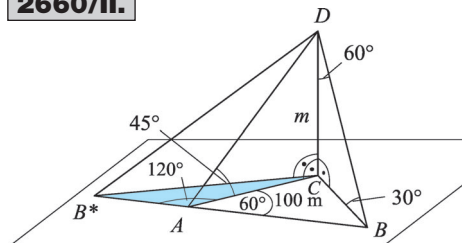
Vegyük észre, hogy az ACD háromszög egyenlő szárú, ebből $CD = 100$ m. Alkalmass szögfüggvény alkalmazásával számítsuk ki a értékét a BCD háromszögből! Azt kapjuk, hogy $a = 100 \cdot \sqrt{3} \approx 173,2$ m. Tekintsük az ABC háromszöget! Vegyük észre, hogy ez egybevágó a BCD háromszöggel! Miért? Ebből következik, hogy az ACB szög derékszög. Ebből következik, hogy $AB = 200$ m. Miért?

A B^*BC háromszög egyenlő szárú, ebből következik, hogy CB^*A szög 30° -os. Miért? A B^*AC háromszög is egyenlő szárú (miért?), ebből következik, hogy $AB^* = AC$, azaz $AB^* = 100$ m.

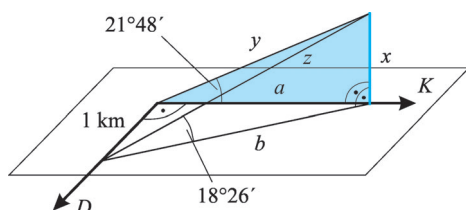
2660/I.



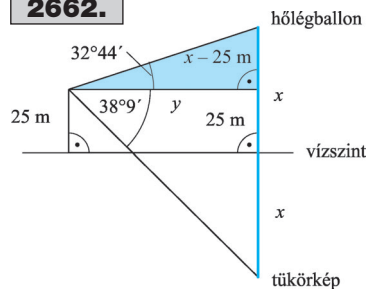
2660/II.



2661.



2662.



2661. $x \approx 0,6$ km magásra emelkedik a hegy a síkság fölé, $y \approx 1,6$ km távolságra, illetve $z \approx 1,9$ km távolságra vagyunk az egyes helyeken a hegy csúcsától.

Alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az x és a befogójú derékszögű háromszögre $\operatorname{tg} 21^\circ 48' = \frac{x}{a}$, majd innen fejezzük ki a -t x segítségével $a = \frac{x}{\operatorname{tg} 21^\circ 48'}$! Majd ugyanezt a szögfüggvényt alkalmazzuk az x és b befogójú derékszögű háromszögre, majd innen fejezzük ki b -t x segítségével $b = \frac{x}{\operatorname{tg} 18^\circ 26'}$! Ezután alkalmazzuk Pitagorasz tételét a síkságon levő derék-

szögű háromszögre $1^2 + \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 21^\circ 48'}\right)^2 = \left(\frac{x}{\operatorname{tg} 18^\circ 26'}\right)^2$! Ebbe az egyenletbe helyettesítsük be az előbb kifejezett értékeket, és x -re kapunk egy egyismeretlenes egyenletet, ebből kisebb számítások után megkaphatjuk a hegy x magasságát. Az y , illetve z meghatározását megfelelő szögfüggvény segítségével végezhetjük el.

2662. $x \approx 250$ m magasan van a hőléggallon a tó fölött.

Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt az $x - 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre, majd egy ugyanilyen szögfüggvényt az $x + 25$ m és y befogójú derékszögű háromszögre! Oldjuk meg a két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert, például úgy, hogy elosztjuk a két egyenlet megfelelő oldalait egymással, majd ekkor y kiesik és x meghatározható.

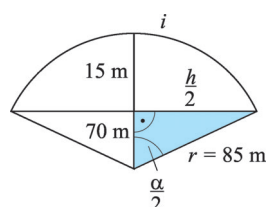
$$\operatorname{tg} 32^\circ 44' = \frac{x - 25}{y}, \operatorname{tg} 38^\circ 9' = \frac{x + 25}{y}, x = \frac{25 \cdot (\operatorname{tg} 38^\circ 9' + \operatorname{tg} 32^\circ 44')}{\operatorname{tg} 38^\circ 9' - \operatorname{tg} 32^\circ 44'}, x \approx 250 \text{ m.}$$

2663. $x \approx 2286$ m magasan van a felhő a hegycsúcs fölött. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál, és hasonló módon oldhatjuk meg, mint az előző feladatot!

2664. $\approx 210,6$ m magas a domb és ≈ 1051 m magasan volt a villámlás a víz színe fölött. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

Körívek, körcikkek, körszeletek

IV

**2665.**

2665. $h \approx 96,4$ m a hídpillérek távolsága és $i \approx 102,5$ m az ívhossz.

2666. $\approx 131,8$ m az ívhossz. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál!

2667. $x \approx 45,4$ cm a tapadási felületek összhossza.

Először számítsuk ki a φ szöget, majd ebből az α_1 szöget, ebből pedig az i_1 ívhosszat! Vegyük észre, hogy $\alpha_2 = 2 \cdot \varphi$, ebből pedig számítsuk ki az i_2 ívhosszat! $x = i_1 + i_2$ a tapadási felületek összhossza.

2668. $x \approx 175,5$ cm a szíj hossza. Készítsünk hasonló ábrát, mint az előző feladatnál! Az előzőhöz hasonló módon számítsuk ki az i_1 és az i_2 ívhosszat! Majd számítsuk ki az e érintőszakasz hosszát! $x = i_1 + i_2 + 2 \cdot e$ a szíj hossza.

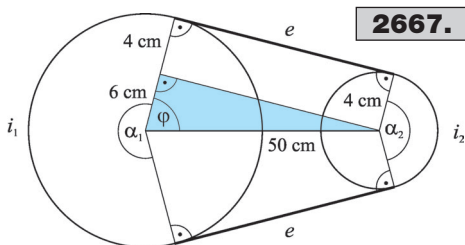
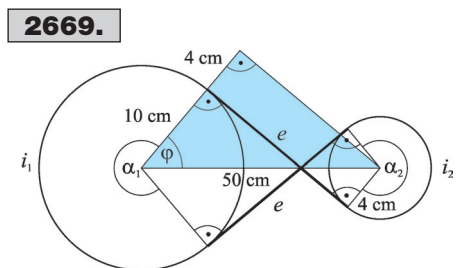
2669. $x \approx 51,9$ cm a tapadási felületek összhossza. A 2669. ábra alapján hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2667. feladatot.

2670. $\approx 182,3$ cm a szíj hossza. A 2669. ábrát felhasználva, hasonlóan oldhatjuk meg, mint a 2668. feladatot.

2671. $\approx 252,8$ cm² a keresett körlaprész területe. A keresett területet megkapjuk, ha a félkör területéből levonjuk a megfelelő körszelet területét. A körszelet területét megkapjuk, ha a megfelelő körcikk területéből levonjuk a megfelelő háromszög területét.

2672. $\approx 108,1$ cm² a keresett terület.

2673. $\approx 88,2$ cm² a keresett terület. A keresett területet megkapjuk, hogy ha a megfelelő deltoid

**2667.****2669.**

területéből levonjuk a megfelelő körcikk területét.

2674. ≈ 223 cm² a kétszeresen fedett rész területe. Vegyük észre, hogy a keresett terület éppen a megfelelő körszelet területének a kétszerese!

2675. ≈ 815 m³ térfogatú a kitermelt kőzet. Pitagorasz tételével számítsuk ki a körhenger sugarát, ez $r \approx 5,32$ m. Majd számítsuk ki a körszelethez tartozó háromszög területét, ez $\approx 9,1$ m², majd a megfelelő körcikk területét, ez $\approx 34,57$ m², ebből a megfelelő körszelet területe $\approx 25,47$ m²! Mint tudjuk, a keresett térfogatot megkapjuk, ha a körszelet területét szorozzuk az alagút hosszával.

2676. $\approx 51,6$ liter olaj van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2677. ≈ 1449 liter olaj van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot.

2678. $\approx 3536,4$ liter víz van a tartályban. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző három feladatot.

Egyenlő szárú háromszögek, derékszögű háromszögek, négyzetek

2679. $a \approx 14,6$ cm az alap hossza, $b \approx 8,1$ cm a szárak hossza, $t \approx 25,62$ cm² a háromszög területe. Húzzuk be az alaphoz tartozó magasságot! Írjunk fel egy megfelelő szögfüggvényt! Ebből és az $a - b = 6,5$ egyenletből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk a -t, illetve b -t. Ezután számítsuk ki az alaphoz tartozó magasságot, majd a területet!

2680. $a \approx 8,3$ cm az alap hossza, $b \approx 7,7$ cm a szár hossza, $t \approx 26,9$ cm² a háromszög területe. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2681. $a \approx 9,2$ cm az alap hossza, $b \approx 16,32$ cm a szár hossza. Írjunk fel a területre egy egyenletet, majd alkalmazzunk egy megfelelő szögfüggvényt az alaphoz tartozó magasság behúzása után! Ezután oldjuk meg az egyenletrendszert!

2682. $a \approx 11,07$ cm az alap hossza, $b \approx 18,77$ cm a szárahossza, $t \approx 99,3$ cm² a háromszög területe.

2683. $\alpha \approx 25,28^\circ$ az alappal szemközti szög, $\beta \approx 77,36^\circ$ a szárákkal szemközti szög. A háromszögben húzzuk meg az alaphoz tartozó magasságot és az egyik szárhoz tartozó magasságot!

Egyrészt $\frac{m_b}{a} = \sin \beta$, másrészt $\frac{m_a}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$. Ezen egyenletrendszerből meghatároz-

hatjuk $\cos \beta$, illetve β értékét.

2684. $a = 4 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 8,94$ cm, $b = 8 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 17,89$ cm a derékszögű háromszög befogói, $\alpha \approx 26,57^\circ$ és $\beta \approx 63,43^\circ$ a két hegyesszöge. A magasságtétellel számítsuk ki az átfogóhoz tartozó magasságot, $m = 8$ cm! Majd megfelelő szögfüggvény segítségével kaphatjuk meg az egyik szöveget, amelyből megkaphatjuk a másik szöveget. Pitagorasz tételének segítségével számíthatjuk ki a befogókat.

2685. $a = 2 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 4,47$ cm, és $b = 4 \cdot \sqrt{5}$ cm $\approx 8,94$ cm a két befogó hossza, $\alpha \approx 26,57^\circ$ és $\beta \approx 63,43^\circ$ a két hegyesszöge. Az átfogóhoz tartozó magasság két szeletre osztja az átfogót. E két szeletre kapunk ebből egy egyenletet. A másik egyenletet a magasságtételből kaphatjuk. Megoldva az egyenletrendszert, egy másodfokú egyenlethez jutunk. Megoldva kaphatjuk, hogy a két szelet 2 cm, illetve 8 cm, illetve fordítva. Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk a befogókat. Szögfüggvény segítségével számíthatjuk ki a szöveget.

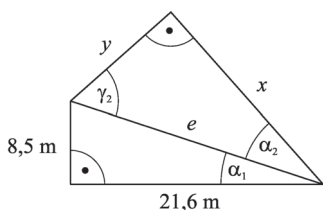
2686. $R = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} \approx 5,46$ egység a háromszög köré írható kör sugara. Például szögfüggvény segítségével kaphatjuk, hogy $BC = R$. Számítsuk ki a beírt kör sugarát, amely 2 egység lesz! Vegyük figyelembe, hogy a B -ből a C -felé induló érintőszakasz hosszát például szögfüggvénnyel megkaphatjuk, hiszen a beírt kör középpontja rajta van a szögfelezőnkön. Ehhez hozzáadva a beírt kör sugarának hosszát, megkapjuk a BC távolságot, vagyis R hosszát.

2687. $a = 5$ cm, $b = 12$ cm a befogók hossza, illetve fordítva. $\alpha \approx 22,62^\circ$ és $\beta \approx 67,38^\circ$, a hegyesszögek, illetve fordítva. Pitagorasz tételének segítségével kaphatunk egy egyenletet. Ha alkalmazzuk a körhöz húzott érintőszakaszok tételét, akkor ebből kaphatjuk, hogy az átfogó hossza egyenlő $a - 2$ cm és $b - 2$ cm összegével. Ebből nyertük a második egyenletet. Oldjuk meg az egyenletrendszert, amely másodfokú egyenletre vezet! Ebből kaphatjuk a befogókat. Szögfüggvény segítségével számíthatjuk ki a szöveget.

2688. $c = 40$ cm az átfogó hossza. $a = 24$ cm és $b = 32$ cm a befogók hossza, illetve fordítva. $\alpha \approx 36,87^\circ$ és $\beta \approx 53,13^\circ$, a hegyesszögek, illetve fordítva. Vegyük észre, hogy $c = 2 \cdot R$! Miért? Alkalmazzuk Pitagorasz tételét és a körhöz húzott érintőszakaszok tételét! Ebből két egyenletet kapunk a két befogóra. Megoldva az egyenletrendszert – amely egy másodfokú egyenletre vezet –, megkaphatjuk a befogókat. Szögfüggvénnyel megkaphatjuk a szöveget.

2689. $\alpha \approx 22,62^\circ$ és $\beta \approx 67,38^\circ$ a hegyesszögek, vagy fordítva. Készítsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek beírt körének sugara 4 egység és a körülírt kör sugara pedig 13 egység! Ez hasonló háromszög ahhoz, mint ami a feladatban szerepel. Ezután például úgy oldhatjuk meg a feladatot, mint az előzőt.

2690. $\approx 6,31$ cm a négyszög ismeretlen oldala. Bocsássunk merőlegest a 11,5 cm-es szakasz megfelelő végpontjából a 15 cm-es oldalra! Ezt szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk. A 11,5 cm-es oldal merőleges vetületét a 15 cm-es oldalra szintén szögfüggvénnyel számíthatjuk. A 4,7 cm-es oldal megfelelő végpontjából húzzunk párhuzamost a 15 cm-es oldallal! Így kaptunk egy olyan derékszögű háromszöget is, amelynek átfogója az ismeretlen oldal. Erre a háromszögre alkalmazzuk Pitagorasz tételét!

2691.

2691. $x \approx 21,22$ cm és $y \approx 9,41$ cm az ismeretlen oldalak hossza. Először számítsuk ki $\alpha_1 + \alpha_2$ értékét $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ - 134,6^\circ$, majd az α_1 értékét szögfüggvénnyel, és ebből kapjuk α_2 értékét. Pitagorasz tételével kaphatjuk e -t. Az x és y az e és α_2 ismeretében szögfüggvénnyel számolható.

2692. $a \approx 39,84$ cm és $c \approx 3,33$ cm az alapok hossza. A rövidebbik alap két végpontjából húzzuk meg a trapéz magasságait! A szárak merőleges vetületeit a nagyobbik alapra, szögfüggvénnyel számíthatjuk ki. Számítsuk ki a magasságot! Állítsunk fel egy egyenletet az alapokra! Majd írjunk fel egy egyenletet a területre! Oldjuk meg az egyenletrendszert!

2693. 1. eset: A szimmetrikus trapéz esete. $a \approx 52,36$ cm és $c \approx 26,57$ cm az alapok hossza, $\alpha \approx 71,19^\circ$ és $\beta \approx 108,81^\circ$. Húzzuk meg a trapéz egyik átlóját! Alkalmazzunk szögfüggvényt, illetve Pitagorasz tételét!

2. eset: A paralelogramma esete. $a = c = 52,36$ cm az alapok hossza, a szögek ugyanazok, mint az első esetben.

2694. $\approx 14,39$ cm az ismeretlen oldal, $\approx 40,12^\circ$, illetve $\approx 171,68^\circ$ az ismeretlen szögek. Állítsunk merőlegest a 18 cm-es, illetve a 7 cm-es oldal megfelelő végpontjából a 13 cm-es oldalra! Ekkor a 18, illetve a 7 cm-es oldalak 13 cm-es oldalra való merőleges vetületei alkalmas szögfüggvényekkel számolhatók, valamint a vetítő szakaszok hosszai is számolhatók. A 7 cm-es oldal megfelelő végpontjából merőlegest állítunk a 18 cm-es oldalt vetítő egyenesre, s így kapunk egy derékszögű háromszöget, amelyből az ismeretlen oldal számítható.

2695. $\approx 31,22$ cm, $\approx 34,68$ cm, $\approx 26,97$ cm, illetve $\approx 18,9$ cm a négyszög ismeretlen oldalai. Húzzuk meg az AC átlót! Állítsunk merőlegest C -ből AB -re és állítsunk merőlegest D -ből az AC átlóra! A keletkező megfelelő derékszögű háromszögekre alkalmazzunk megfelelő szögfüggvényeket, majd Pitagorasz tételét!

Trigonometrikus kifejezések

2696. a) $\sin^2 \alpha$; b) $\cos \alpha$; c) 1.

2697. a) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$; b) $\cos^2 \alpha$; c) $-\operatorname{tg}^2 \alpha$.

2698. a) 0; b) $2 \cdot \sin \beta$; c) $-\operatorname{ctg}^2 \alpha$.

2699. a) $\sin^2 \alpha$; b) 2; c) $\frac{2}{\sin^2 \alpha}$.

2700. a) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$. b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\operatorname{tg} \alpha = t$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{t}$. d) $\cos \alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = 2 \cdot \sqrt{2}$.

e) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. f) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}$.

g) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$. h) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{ctg} \alpha = 1$.

i) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. j) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$.

$$k) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}. \quad l) \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

$$m) \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}; \quad \cos \alpha = \frac{4 \cdot \sqrt{17}}{17}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}.$$

2701. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$. **2702.** a) 1; b) $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$. **2703.** a) 1; b) 2; c) 1. **2704.** a) 1; b) 1.

2705. a) Végezzük el a bal oldalon a szorzásokat és a jobb oldalon a négyzetre emelést!
b) Szorozzunk be a nevezőkkel!

2706. Alakítsuk szorzattá a bal oldal számlálóját, másrészt vegyük figyelembe, hogy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha)$.

2707. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket!

2708. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket!

2709. Végezzük el a bal oldalon a kijelölt műveleteket, majd alkalmazzuk a tangens definícióját, és hozzunk közös nevezőre.

2710. a) és b) használjuk a definíciókat és hozzunk közös nevezőre!

2711. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1. **2712.** $\sin^2 \alpha$.

2713. a) $-\operatorname{ctg}^6 \alpha$; b) $\cos^2 x$; c) $\operatorname{tg}^2 x$; d) 1.

2714. A bal oldal számlálójában is és nevezőjében is hozzunk közös nevezőre!

2715. a) 1. Emeljük köbre a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ egyenlőséget! b) -1 . Használjuk fel az előző feladat eredményét és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ négyzetre emelésével kapott eredményt!

2716. a) $m^2 - 2$. Emeljük négyzetre a $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$ egyenletet! b) $m^3 - 3 \cdot m$. Alakítsuk szorzattá a $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$ kifejezést!

2717. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ)$, másrészt $\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ)$, alkalmazzuk még a kotangens definícióját. Majd végezzük el a műveleteket!

2718. A kifejezés pontos értéke 2. Vegyük figyelembe, hogy $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$, másrészt $\sin 73^\circ = \cos 17^\circ$! Miért?

2719. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin \frac{3 \cdot \pi}{7} = \cos \frac{\pi}{14}$ és

$$\cos \frac{3 \cdot \pi}{7} = \sin \frac{\pi}{14}! \text{ Miért?}$$

2720. A kifejezés pontos értéke 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(45^\circ - \alpha) = \cos(\alpha + 45^\circ)$ és $\cos(30^\circ + \alpha) = \sin(60^\circ - \alpha)$! Miért?

Szögfüggvények általánosítása

2721. a) $\sin \alpha$; b) $-\cos \alpha$; c) $-\operatorname{tg} \alpha$; d) $-\operatorname{ctg} \alpha$.

2722. a) $-\sin \alpha$; b) $-\cos \alpha$; c) $\operatorname{tg} \alpha$; d) $-\operatorname{ctg} \alpha$; e) $-\sin \alpha$; f) $\cos \alpha$; g) $\operatorname{tg} \alpha$; h) $\operatorname{ctg} \alpha$.

2723. a) $\cos \alpha$; b) $\sin \alpha$; c) $\cos \alpha$; d) $-\sin \alpha$; e) $\sin \alpha$; f) $-\operatorname{tg} \alpha$; g) $\operatorname{ctg} \alpha$; h) $-\operatorname{ctg} \alpha$; i) $\operatorname{tg} \alpha$; j) $-\cos \alpha$.

2724. a) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. c) -1 ; 1 ; -1 ; -1 ; 1 ; -1 . d) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 1 .

2725. Mindegyik részfeladat eredménye 0.

2726. a) $-\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) -1 ; e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV

2727. A kifejezés pontos értéke 1. **2728.** Mindegyik részfeladat eredménye 0.

2729. Mindegyik részfeladat eredménye 0. **2730.** a) $-\frac{1}{2}$; b) 3; c) $\frac{3}{4}$.

2731. Vegyük figyelembe, hogy a szinuszfüggvény periódusa 360° , másrészt $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$!

2732. A kifejezés pontos értéke -8 . Vegyük figyelembe, hogy a tangensfüggvény periódusa π , másrészt $\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$! Ezeket alkalmazva igazolhatjuk, hogy $\operatorname{tg} \frac{2003 \cdot \pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{3 \cdot \pi}{4}$, másrészt $\operatorname{tg} \frac{3 \cdot \pi}{4} = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

2733. A kifejezés pontos értéke $\frac{1}{4}$. Vegyük figyelembe, hogy a koszinuszfüggvény periódusa $2 \cdot \pi$, másrészt a tangensfüggvény periódusa π . Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy a négyzetre emelendő tört számlálója $\cos \frac{\pi}{6}$, míg a nevezője $\operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{3}$. Az utóbbi pedig egyenlő $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} \right)$ -mal! Folytassuk!

2734. a) Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy $\cos(\pi + x) = -\cos x$ és $\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x$! b) Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy $\sin(180^\circ - x) = \sin x$ és $\sin(270^\circ - x) = \sin(-90^\circ - x) = -\sin(x + 90^\circ)$!

2735. a) Végeredmény: 1. Vegyük figyelembe, hogy az első szorzat mindkét tényezője $-\sin x$, míg a második szorzat mindkét tényezője $\cos x$! b) Végeredmény: 1. Igazoljuk, hogy az első szorzat mindkét tényezője $\sin x$, míg a második szorzat első tényezője $\cos x$, a második tényezője $-\cos x$!

2736. a) $\operatorname{ctg} \alpha$; b) $-\cos \alpha$; c) $-\cos \alpha$. **2737.** $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$; $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

2738. Végeredmény: $\sin x \cdot \cos x = \frac{12}{25}$. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, másrészt

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}!$$

2739. Használjuk fel, hogy $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$, ezután a négyzetgyök alatt alakítsunk ki teljes négyzetet! Gondoljuk meg, hogy a feltételek miatt $|1 + \operatorname{ctg} \alpha| = -1 - \operatorname{ctg} \alpha$!

2740. A kifejezés pontos értéke: 0. Használjuk fel, hogy $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, ezért $\operatorname{tg} 177^\circ = -\operatorname{tg} 3^\circ$. Hasonló módon $\operatorname{ctg} 157^\circ = -\operatorname{ctg} 23^\circ$.

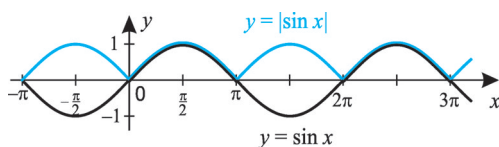
Trigonometrikus függvények grafikonjai

2741. a) Vegyük figyelembe: $\sin(-x) = -\sin x$! b) Gondoljuk meg: $\cos(-x) = \cos x$!

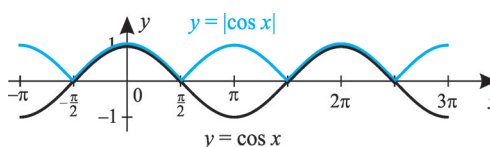
2742. a) (2742/I.) b) (2742/II.)

2743. a) Gondoljuk meg, hogy $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, ezért tükrözzük a tg függvény grafikonját az x tengelyre. b) Vegyük figyelembe, hogy $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, ezért tükrözzük a ctg függvény grafikonját az x tengelyre.

2742/I.

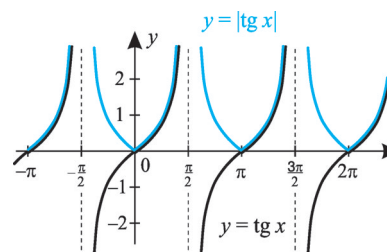


2742/II.



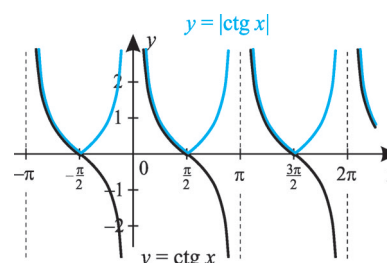
- 2744.** a) (2744/I.) b) (2744/II.)
2745. a) Vegyük észre, hogy $f(x) = 1$ minden valós x -re! b) Gondoljuk meg, hogy $g(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$.
2746. a) Igazoljuk, hogy $f(x) = 0$. b) Igazoljuk, hogy $g(x) = 0$.
2747. a) Vegyük figyelembe, hogy $f(x) = -\cos x$. b) Gondoljuk meg, hogy $g(x) = \cos x$.
2748. a) Vegyük észre, hogy $f(x) = -\sin x$. b) Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = \sin x$.
2749. a) A tg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$ -vel az x tengely irányában a pozitív irányba.
 b) A tg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$ -vel az x tengely irányában a negatív irányba.

2744/I.



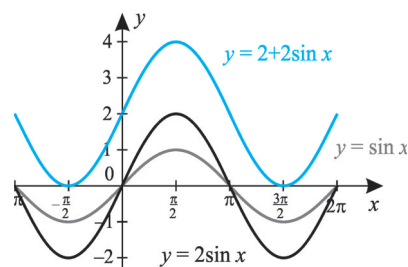
- 2750.** a) A ctg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$ -vel az x tengely irányában a negatív irányba!
 b) A ctg függvény grafikonját toljuk el $\frac{\pi}{2}$ -vel az x tengely irányában a pozitív irányba!
2751. a) $f(x) = \text{tg } x$; b) $g(x) = \text{tg } x$.
2752. a) Igazoljuk, hogy $f(x) = 0$. b) Igazoljuk, hogy $g(x) = 2 \cdot \sin x$.

2744/II.



- 2753.** a) Gondoljuk meg, hogy $f(x) = 2 \cdot \sin x$, ha $\sin x \geq 0$ és $f(x) = 0$, ha $\sin x < 0$!
 b) Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = 2 \cdot \cos x$, ha $\cos x \geq 0$ és $g(x) = 0$, ha $\cos x < 0$!
2754. a) Vegyük észre, hogy $f(x) = -2 \cdot \sin x$, ha $\sin x < 0$ és $f(x) = 0$, ha $\sin x \geq 0$! b) Vegyük figyelembe, hogy $g(x) = 0$, ha $\cos x \geq 0$ és $g(x) = -2 \cdot \cos x$, ha $\cos x < 0$!
2755. a) Gondoljuk meg, hogy $f(x) = 1$, ha $\sin x > 0$ és $f(x) = -1$, ha $\sin x < 0$. b) Figyeljük meg, hogy $g(x) = 1$, ha $\cos x > 0$ és $g(x) = -1$, ha $\cos x < 0$.
2756. Lásd az ábrát!

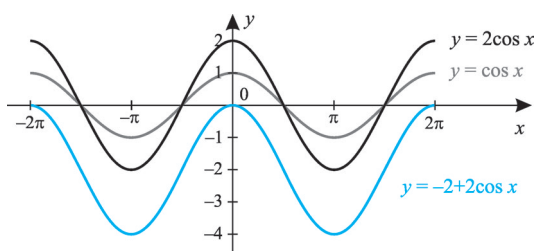
2756.



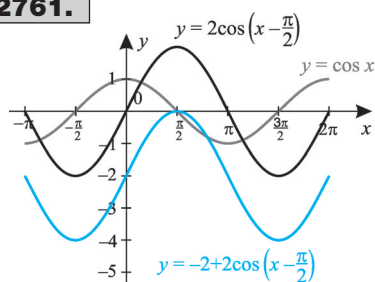
2757. 2758. 2759. 2760. 2761. 2762. 2763. 2764. Lásd az ábrákat!

IV

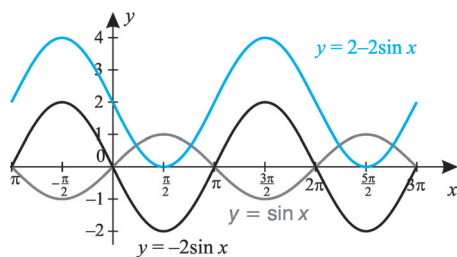
2757.



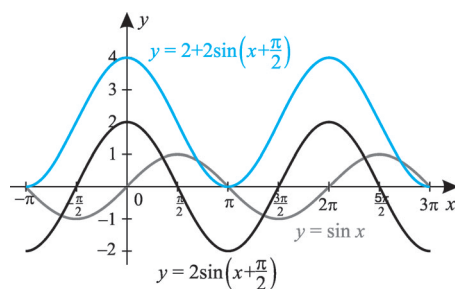
2761.



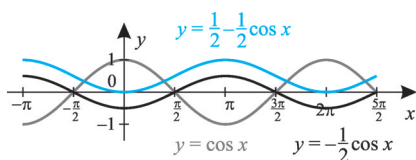
2758.



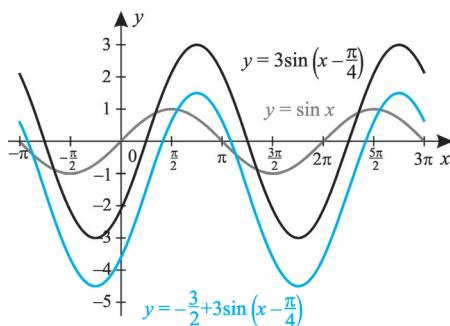
2762.



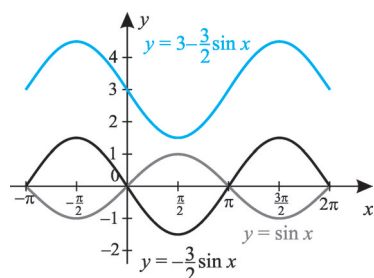
2759.



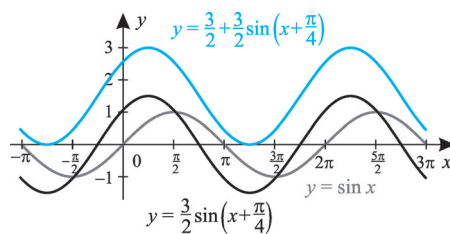
2763.



2760.

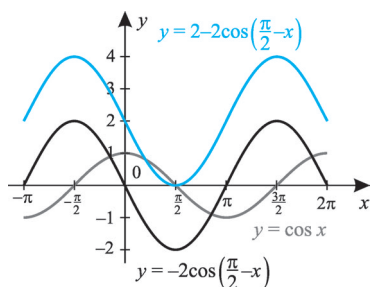


2764.

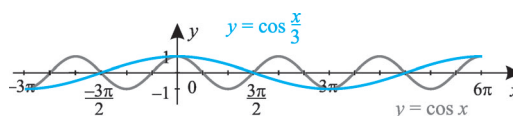


2765. 2766. 2767. 2768. a) (2768/I.); b) (2768/II.); c) (2768/III.)
2769. a) (2769/I.); b) (2769/II.); c) (2769/III.) Lásd az ábrákat!

2765.

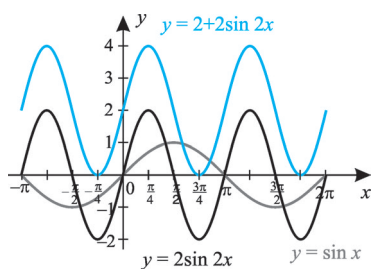


2768/II.

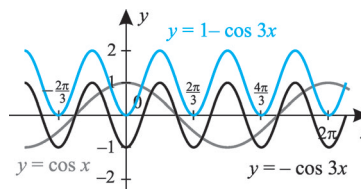


IV

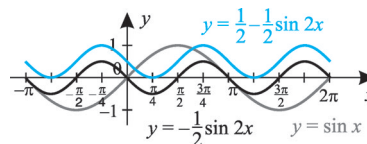
2766.



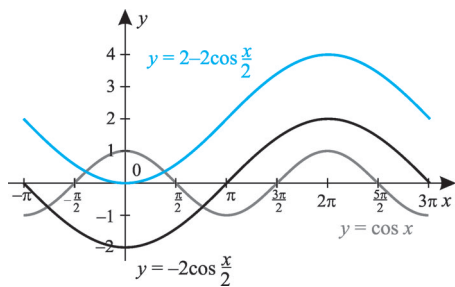
2768/III.



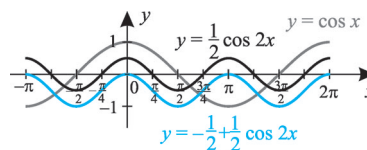
2769/I.



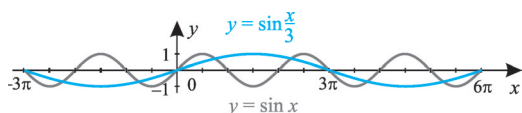
2767.



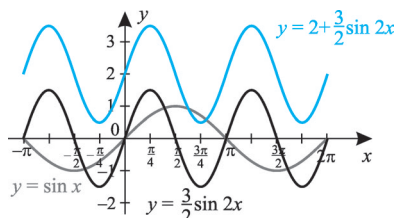
2769/II.



2768/I.



2769/III.



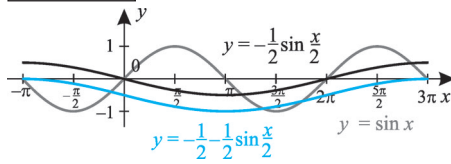
IV

2770. a) (2770/I.); b) (2770/II.); c) (2770/III.)

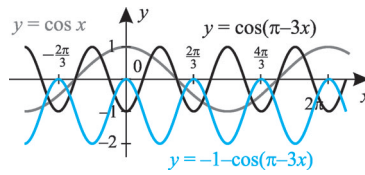
2771. a) (2771/I.); b) (2771/II.) **2772.** a) (2772/I.); b) (2772/II.)

2773. a) (2773/I.); b) (2773/II.) **2774.** Lásd az ábrákat!

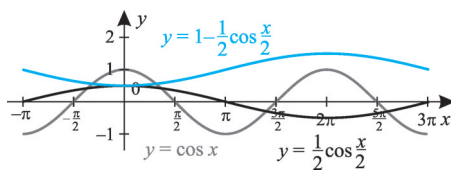
2770/I.



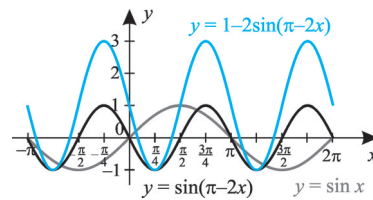
2772/I.



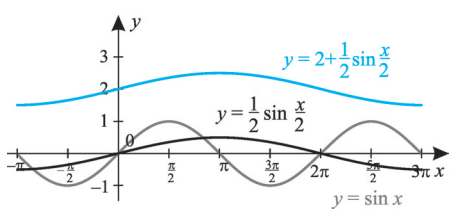
2770/II.



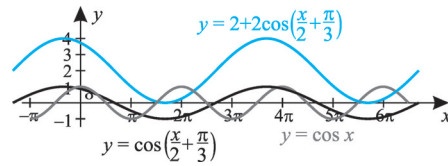
2772/II.



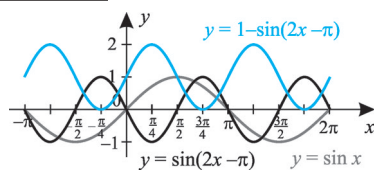
2770/III.



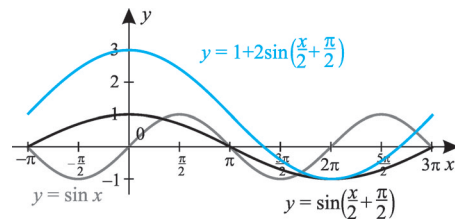
2773/I.



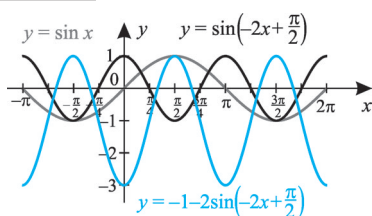
2771/I.



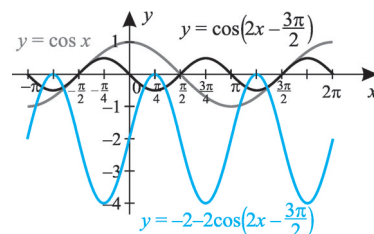
2773/II.



2771/II.

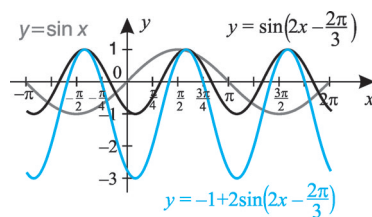


2774.



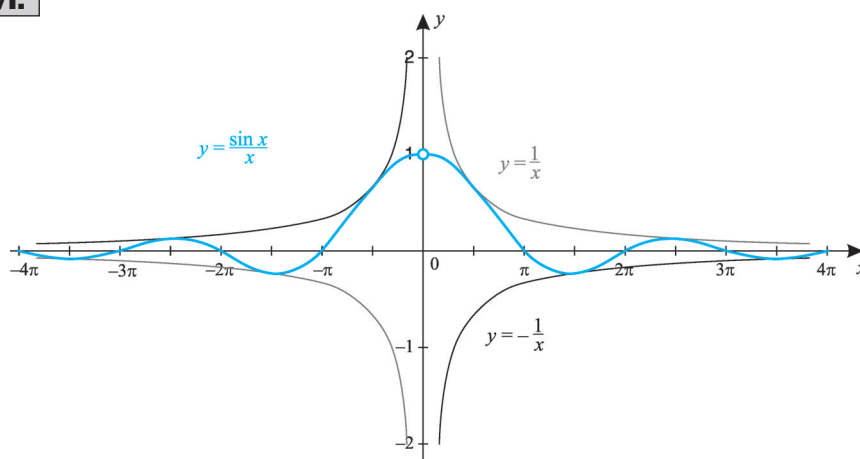
2775. 2776. a) (2776/I.); *b)* (2776/II.) Lásd az ábrákat!

2775.

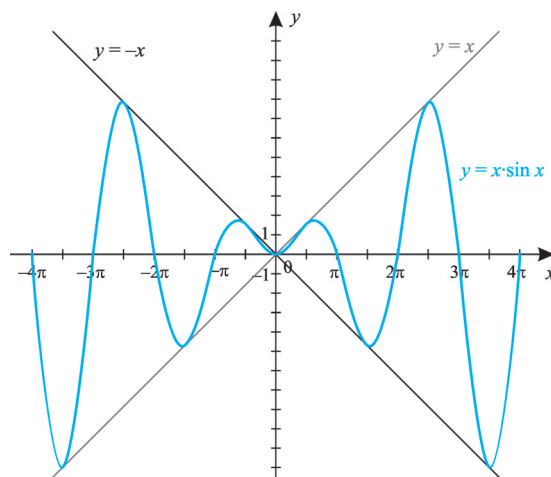


IV

2776/I.



2776/II.



Trigonometrikus egyenletek I. rész

Bevezető feladatok

A következőkben k , illetve az m tetszőleges egész számokat jelent.

IV

2777. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 150^\circ + m \cdot 360^\circ$).

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 120^\circ + m \cdot 360^\circ$).

c) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 210^\circ + m \cdot 360^\circ$).

d) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = -60^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 240^\circ + m \cdot 360^\circ$).

e) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = x_1$. ($x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$). f) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = -90^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 270^\circ + m \cdot 360^\circ$). (A két megoldás megegyezik.)

g) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 135^\circ + m \cdot 360^\circ$).

h) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = -45^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 225^\circ + m \cdot 360^\circ$).

i) $x_1 = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = k \cdot 360^\circ$; $x_2 = 180^\circ + m \cdot 360^\circ$). A két megoldás-sorozatot össze lehet vonni a következőbe: $x = n \cdot \pi$, ahol n tetszőleges egész szám. j) Nincs megoldás a valós számok halmazán. k) $x_1 \approx 0,9273 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 2,2143 + m \cdot 2 \cdot \pi$.

($x_1 \approx 53,13^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 \approx 126,87^\circ + m \cdot 360^\circ$). l) Nincs megoldás a valós számok halmazán.

2778. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = -60^\circ + m \cdot 360^\circ$).

b) $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = -120^\circ + m \cdot 360^\circ$).

c) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = -30^\circ + m \cdot 360^\circ$).

d) $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = -150^\circ + m \cdot 360^\circ$).

e) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = -45^\circ + m \cdot 360^\circ$).

f) $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = -135^\circ + m \cdot 360^\circ$).

g) $x_1 = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = x_1$. ($x_1 = k \cdot 360^\circ$). h) ($x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\pi + m \cdot 2 \cdot \pi$). (A két megoldás ugyanaz.) i) Nincs megoldás a valós számok halmazán. j) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_2 = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 = -90^\circ + m \cdot 360^\circ$). A két megoldást összefoglalhatjuk a következőbe: $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$, ahol n tetszőleges egész szám. k) Nincs megoldás a valós

számok halmazán. $l) x_1 \approx 1,23096 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1,23096 + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 \approx 70,53^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 \approx -70,53^\circ + m \cdot 360^\circ$).

2779. a) $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$). b) $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = -45^\circ + k \cdot 180^\circ$).

c) $x = 0 + k \cdot \pi = k \cdot \pi$. ($x = k \cdot 180^\circ$). d) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$. ($x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$). e) $x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

($x = -60^\circ + k \cdot 180^\circ$). f) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ$). g) $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

($x = -30^\circ + k \cdot 180^\circ$). h) $x \approx 1,1685 + k \cdot \pi$. ($x \approx 66,95^\circ + k \cdot 180^\circ$).

2780. a) $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. ($x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$). b) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. ($x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ$).

c) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$. ($x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$). d) $x \approx 0,8548 + k \cdot \pi$. ($x \approx 48,98^\circ + k \cdot 180^\circ$).

Alapvető feladatok

A következőkben k, l, m, n tetszőleges egész számokat jelentenek.

2781. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

c) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. d) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

2782. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

c) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. d) $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$.

2783. a) $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. ($x_1 = 15^\circ + k \cdot 180^\circ$); ($x_2 = -45^\circ + l \cdot 180^\circ$).

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{9} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2784. a) $x = \frac{7 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. b) $x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{10} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$.

2785. a) $x = \frac{11 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$. b) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

2786. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \pi + l \cdot \pi$.

2787. a) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_2 = \frac{4 \cdot \pi}{9} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$;

$x_3 = \frac{\pi}{9} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$; $x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

2788. a) $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. b) $x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2789. a) **1. eset:** $2x = x + \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$, ebből $x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi$. **2. eset:** $2x + x = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi$, ebből

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}. \quad b) \quad x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}; \quad x_2 = \frac{\pi}{5} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}.$$

$$\mathbf{2790. a)} \quad x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{85}; \quad x_2 = \frac{\pi}{115} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{115}. \quad b) \quad x_1 = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{6}.$$

$$\mathbf{2791. a) 1. eset:} \quad 2x = x + k \cdot 2 \cdot \pi, \text{ ebből } x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi. \quad \mathbf{2. eset:} \quad 2x + x = l \cdot 2 \cdot \pi, \text{ ebből } x_2 = l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}. \quad b) \quad x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = l \cdot \frac{\pi}{6}.$$

$$\mathbf{2792. a) } \quad x_1 = k \cdot \frac{\pi}{450}; \quad x_2 = l \cdot \frac{\pi}{550}. \quad b) \quad x_1 = \frac{\pi}{7} + k \cdot \frac{\pi}{7}; \quad x_2 = -\frac{\pi}{18} + l \cdot \frac{\pi}{9}.$$

2793. a) $2x = x + k \cdot \pi$, ebből $x = k \cdot \pi$. Meg kell vizsgálni, hogy a tangensek nevezői mikor nem nullák. Ha ezt megtesszük, akkor azt kapjuk, hogy a kizárt valós számok nem esnek bele az előbb megadott megoldásjelöltbe, ezért az valóban megoldás. Behelyettesítéssel is ellenőrizhetjük, hogy kielégíti az egyenletet. **b)** $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$ megoldásjelöltet kapjuk, ha megoldjuk az egyenletet. De ezen sorozat nem minden eleme megoldás. Ha a tangensek nevezőit megvizsgáljuk, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy csak a következő részsorozatai megoldások az előbb kapott megoldásjelöltnek: $x_1 = l \cdot \pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + m \cdot \pi;$

$$x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot \pi.$$

$$\mathbf{2794. a) } \quad x = \frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{\pi}{10}. \quad b) \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{4}.$$

2795. a) $x = k \cdot \pi$ megoldásjelöltet kapjuk, ha megoldjuk az egyenletet. Ámde, ha megvizsgáljuk a kotangensek nevezőit, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy a megoldásjelölt számok esetén nulla lenne a nevező. Ez nem lehet, ezért az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. **b)** $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ megoldásjelöltet kapunk, de ha megvizsgáljuk a kotangensek nevezőit, miszerint azok nem lehetnek nullák, akkor azt kapjuk, hogy csak a következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi; \quad x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot \pi.$

$$\mathbf{2796. a) } \quad \sin 4x = \sin(-x), \text{ ezt pedig megoldva: } x_1 = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}; \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}.$$

$$b) \quad x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{2797. a) } \quad x_1 = k \cdot \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{16} + l \cdot \frac{\pi}{8}. \quad b) \quad x_1 = \frac{11 \cdot \pi}{48} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = -\frac{17 \cdot \pi}{24} + l \cdot \pi.$$

$$\mathbf{2798. a) 1. eset:} \quad 2x - x = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi, \text{ ebből } x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi. \quad \mathbf{2. eset:} \quad 2x + x = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi, \text{ ebből } x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}. \quad b) \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \quad x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{4}.$$

$$\mathbf{2799. a) } \quad x_1 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{20} + l \cdot \frac{\pi}{5}. \quad b) \quad x_1 = \pi + k \cdot \pi; \quad x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{16} + l \cdot \frac{\pi}{4}.$$

2800. a) $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$ a megoldásjelölt, de ebből csak a következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = l \cdot \pi; \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + m \cdot \pi; \quad x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot \pi. \quad b) \quad x = k \cdot \frac{\pi}{3}$ a megoldásjelölt, de ebből csak a

következő részsorozatok a megoldások: $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot \pi$.

2801. a) Vegyük figyelembe, hogy $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$; ezt felhasználva, átírhatjuk az egyen-

letet a következő alakba: $\sin 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$, ez pedig már korábban tárgyalt típusú. A meg-

oldások: $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}$. b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

2802. a) $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \frac{\pi}{3}$. b) $x_1 = \frac{\pi}{96} + k \cdot \frac{\pi}{8}$; $x_2 = -\frac{\pi}{120} + l \cdot \frac{\pi}{10}$.

2803. a) $x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + l \cdot \frac{\pi}{2}$. b) $x_1 = -\frac{\pi}{20} + k \cdot \frac{\pi}{5}$; $x_2 = -\frac{\pi}{12} - l \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + m \cdot \frac{\pi}{3}$, ahol $m = -l$ vagy $x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$.

2804. a) $x_1 = -\frac{5 \cdot \pi}{48} + k \cdot \frac{\pi}{4}$; $x_2 = -\frac{\pi}{24} + l \cdot \frac{\pi}{2}$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{10} - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} - l \cdot 2 \cdot \pi$.

2805. a) Rendezzük nullára az egyenletet, ezután alakítsuk szorzattá! Használjuk fel, hogy egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla! $\sin^2 x \cdot (\sin x - 1) = 0$.

$x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$. (Összefoglal-

hatjuk a következő egyenletbe: $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, ahol n tetszőleges egész szám.)

2806. a) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$, összefoglalva: $x = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi$. b) $x_1 = k \cdot \pi$;

$x_2 = l \cdot 2 \cdot \pi$, összefoglalva: $x = m \cdot \pi$.

2807. a) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$;

$x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2808. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2809. a) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$; b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$.

2810. a) $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. b) $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$.

2811. a) $x \approx 1,1071 + k \cdot \pi$, ($x \approx 63,43^\circ + k \cdot 180^\circ$). b) $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2812. a) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

2813. a) $x_1 = -\frac{3 \cdot \pi}{10} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{13 \cdot \pi}{10} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{10} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{9 \cdot \pi}{10} +$

$+ n \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. A $\sin x = 2$ -ből nincs valós megoldás.

IV

2814. a) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -0,3398 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx 3,4814 + m \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 \approx -19,47^\circ + l \cdot 360^\circ$; $x_3 \approx 199,47^\circ + m \cdot 360^\circ$). b) $x_1 \approx 0,9945 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx 2,1471 + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 \approx -0,2408 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx 3,3824 + n \cdot 2 \cdot \pi$. ($x_1 \approx 56,98^\circ + k \cdot 360^\circ$; $x_2 \approx 123,02^\circ + l \cdot 360^\circ$; $x_3 \approx -13,80^\circ + m \cdot 360^\circ$; $x_4 \approx 193,80^\circ + n \cdot 360^\circ$).

2815. a) $x = 0 + k \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0,4205 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx -0,4205 + m \cdot \pi$.

2816. a) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1,2490 + l \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$.

2817. a) $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{8} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{8} + l \cdot \pi$.

2818. a) $x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi$;

$x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$.

2819. a) $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_4 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2820. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\cos x = 2$ -ből nem kapunk megoldást.

b) $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2821. a) $x_1 = k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = 0 + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2822. a) $x_1 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

$\sin x = -2$ -ből nem kapunk megoldást.

2823. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

b) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1,1071 + k \cdot \pi$. ($x_2 \approx -63,43^\circ + k \cdot 180^\circ$). $\left(\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\right)$ Alakít-
suk át az egyenletet például a következő alakúra: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0!$

2824. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

Rövidebben: $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_3 \approx 1,2309 + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 \approx -1,2309 + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2825. a) Az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán. $1 + \cos 2x \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; ellentmondás. b) $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

2826. a) $x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$. b) Nincs megoldása a valós számok halmazán.

2827. a) Nincs megoldása a valós számok halmazán. b) $x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2828. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$. b) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2829. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$. $\cos x = 2$ -ből nincs megoldás.

b) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$.

2830. Azonosság, tehát minden valós szám megoldása az egyenletnek. Egyrészt emeljük négyzetre a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, másrészt emeljük az előző azonosságot harmadik hatványra és a kapott eredményeket használjuk fel.

2831. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$.

2832. $x = 0$. Vázoljuk az $f(x) = \cos x$ és a $g(x) = x^2 + 1$ függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben!

2833. Nincs megoldás a valós számok halmazán. Vázoljuk az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = -(x-1)^2$ függvény grafikonját közös koordináta-rendszerben!

2834. $x = \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $y = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi$. Alakítsunk ki teljes négyzetet az x -es tagokból, az y -os tag már teljes négyzet.

2835. $\{x = 1; y = k \cdot 2 \cdot \pi\}$, $\{x = -1; y = \pi + l \cdot \pi\}$.

Hozzuk a következő alakra: $x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos y + 1 = 0$. Tekintsük ezt x -re másodfokú egyenletnek! Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

Összetettebb feladatok

2836. $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$.

2837. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot \pi$.

2838. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2839. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi$.

2840. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi$.

2841. $x_1 \approx 0,6610 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0,7484 + l \cdot \pi$. Vezessünk be új változót, például:

$y = \sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}$. Ekkor másodfokú egyenletre vezethetjük vissza az eredeti egyenletet.

2842. $x_1 \approx -0,3218 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0,1651 + l \cdot \pi$. Vegyük észre, hogy: $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$. Így

az egyenlet: $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \cdot \operatorname{ctg} x = |\operatorname{tg} x| - 1$. Különböztessünk meg két esetet, egyrészt amikor $\operatorname{tg} x > 0$, másrészt amikor negatív (nulla nem lehet).

2843. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$; $x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_5 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + p \cdot 2 \cdot \pi$. Itt k, l, m, n, p tetszőleges egész számok. Vegyük észre, hogy $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

2844. $x_1 \approx 1,7794 + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 \approx -1,7794 + l \cdot 2 \cdot \pi$. Különböztessünk meg két esetet, egyrészt amikor $\cos x$ nemnegatív, másrészt amikor negatív.

2845. $x_1 = \frac{1}{6} + k$; $x_2 = -\frac{1}{6} + l$. Alakítsuk át tangensre a kotangentst! Ebből kapjuk, hogy $\frac{\pi}{3} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$. Ebből következik, hogy $\cos(2 \cdot \pi \cdot x) = \frac{1}{2}$. ($k = 0$ lehet csak.)

2846. $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = -3,5 + \sqrt{11,25}$; $x_4 = -3,5 - \sqrt{11,25}$; $x_5 = x_6 = 1$.

$\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{x^2 + x + 1} = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$, ebből $0 = (3k - 1) \cdot x^2 + (3k - 7) \cdot x - 1 + 3k$. Ennek a diszkriminánsa nemnegatív kell hogy legyen, ebből következik, hogy: $0 \geq 3k^2 + 2k - 5$. Ezt oldjuk meg, majd vegyük figyelembe, hogy k egész! Ebből következik, hogy k lehetséges értékei $-1, 0, 1$.

2847. $x_1 = 1 + \sqrt{2k + 1}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2k + 1}$, ahol k nemnegatív egész szám.

$x_3 = -1 + \sqrt{2l + 1}$; $x_4 = -1 - \sqrt{2l + 1}$, ahol l nemnegatív egész szám.

2848. $x_1 = k \cdot \pi + \sqrt{k^2 \cdot \pi^2 + 1}$; $x_2 = k \cdot \pi - \sqrt{k^2 \cdot \pi^2 + 1}$. Itt k tetszőleges egész szám.

$x_3 = l \cdot \pi + \sqrt{l^2 \cdot \pi^2 - 1}$; $x_4 = l \cdot \pi - \sqrt{l^2 \cdot \pi^2 - 1}$. Itt l tetszőleges nem nulla egész szám.

A továbbiakban k, l, m, n, p, q, r, s tetszőleges egész számokat jelent.

2849. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1,1071 + l \cdot \pi$. Osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$ -szel, amikor ez nem nulla! Ezzel $\operatorname{tg} x$ -re másodfokú egyenletet kapunk.

2850. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 0,4636 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2851. $x_1 \approx 0,6319 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1,2199 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot, ha előbb felhasználjuk, hogy $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

2852. $x_1 \approx 1,0591 + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0,2737 + l \cdot \pi$. Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

2853. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -0,2450 + l \cdot \pi$.

2854. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx -1,1071 + l \cdot \pi$. Szorozzunk be a nevezővel, ezután olyan típusú lesz, mint az előző feladatokban megoldottak!

2855. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$; $x_2 \approx 1,4289 + l \cdot \pi$; $x_3 \approx 1,2490 + m \cdot \pi$.

2856. $x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + m \cdot \pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$.

2857. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi$; $x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_4 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi$; $x_5 = \frac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi$; $x_6 = -\frac{\pi}{3} + q \cdot 2 \cdot \pi$; $x_7 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + r \cdot 2 \cdot \pi$;

$x_8 = -\frac{2 \cdot \pi}{3} + s \cdot 2 \cdot \pi$. Emeljük harmadik hatványra a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot! Ezt felhasználva előbb-utóbb $\cos x$ -re negyedfokú egyenletet kapunk, amely másodfokú egyenletre vezethető vissza. (Lehet $\sin x$ -re negyedfokú is az egyenlet.)